Universitatea Tehnică din Cluj Napoca
Centrul Universitar Nord Baia Mare
Facultatea de Științe
Departamentul de Matematică și Informatică
Specializarea Matematică informatică

Teoreme fundamentale în geometria triunghiului

Coordonator științific: Absolvent:

Conf. Univ. Dr. Laurian PIȘCORAN Filip NICU

Baia Mare

2020

Cuprins

Introducere

Geometria este un cuvânt derivat din limba greacă. În greacă, "geo" înseamnă "pământ" și "methros" înseamnă a măsura. Geometria este folosită zilnic de aproape toată lumea. Găsim geometria în mai multe domenii: artă, arhitectură, inginerie, robotică, astronomie, sculpturi, spațiu, natură, sport, mașini etc.

Unul dintre cei mai importanți contribuitori în domeniul geometriei a fost Euclid (365-300 î.Hr.). Astăzi continuăm sa folosim regulile sale pentru geometrie.

Principalele concepte în geometrie sunt liniile și segmentele, formele și solidele (inclusiv poligoanele), triunghiurile și unghiurile și circumferința unui cerc . În geometria euclidiană, unghiurile sunt folosite pentru a studia poligoane și triunghiuri.

În această lucrare mi-am propus o abordare sintetică a geometriei. Geometria sintetică este cea mai veche ramură a geometriei. Geometria euclidiană care nu face apel la un sistem de coordonate sau la un produs scalar, noțiuni care au intervenit mult mai târziu în geometrie, poate fi numită geometrie sintetică.

Această lucrare este structurată în trei capitole.

În primul capitol numit "Puncte. Drepte. Cercuri remarcabile asociate unui triunghi." sunt prezentate noțiuni introductive din geometria triunghiului.

În al doilea capitol sunt prezentate câteva dintre cele mai importante teoreme din geometria triunghiului, unele fiind folosite și de către elevii claselor gimnaziale.

Ultimul capitol prezintă câteva aplicații în care am aplicat teoremele si noțiunile descrise la primele două capitole.

Teoreme fundamentale în geometria triunghiului

1. Puncte. Drepte. Cercuri remarcabile asociate unui triunghi.

1.1. **Simediane [1]**

Într-un triunghi izogonala medianei se numește simediană.

1.2. **Punctul lui Lemoine [1]**

Într-un triunghi simedianele sunt concurente.

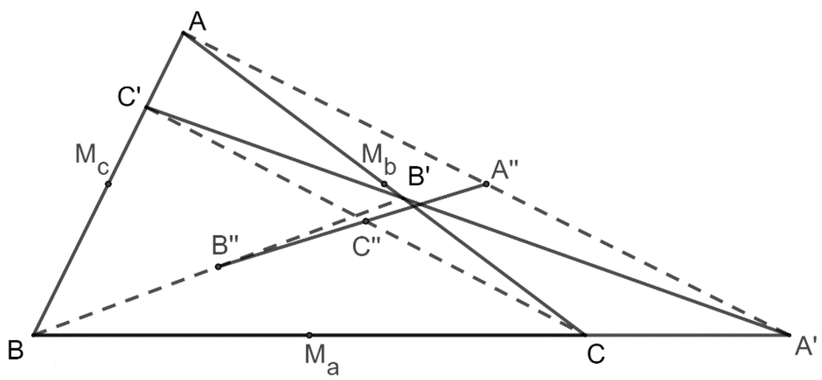
1.3. **Punctul lui Spieker [1]**

Se numește punctul lui Spieker al unui triunghi centrul cercului înscris în triunghiul median al triunghiului.
Cercul înscris în triunghiul median se numește cercul lui Spieker.

1.4. **Dreapta lui Gauss [1]**

<u>Teorema lui Gauss</u>

Fie triunghiul ΔABC, iar d o dreaptă care intersectează dreptele BC, CA și AB în punctele A', B' respectiv C'. Mijloacele segmentelor AA', BB' și CC' sunt coliniare.

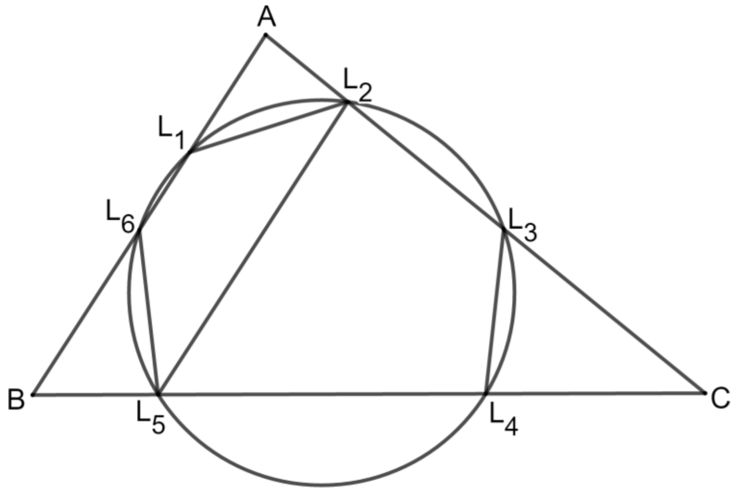


1.5. **Cercul lui Taylor [1]**

Proiecțiile picioarelor înălțimilor pe laturile unui triunghi ΔABC sunt situate pe același cerc.

1.6. **Cercul lui Tucker [2]**

Fie ΔABC un triunghi și fie L_1, $L_6 \in (AB)$, L_2, $L_3 \in (AC)$, L_4, $L_5 \in (BC)$ cu proprietatea că $L_!L_2 = L_3L_4 = L_5L_6$ și astfel încât patruraterele L_1L_2CB, L_3L_4BA, L_5L_6AC sunt inscriptibile. Atunci punctele L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 se află pe același cerc numit cercul lui Tucker.

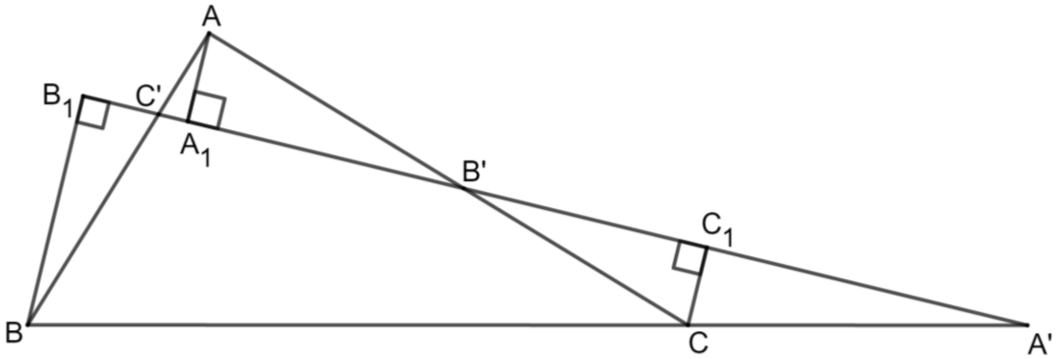


2. Teoreme fundamentale în geometria triunghiului.

2.1. Teorema lui Menelaus [4]

Fie triunghiul ΔABC și A', B', C' trei puncte astfel încât $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă punctele A', B', C' sunt coliniare, atunci are loc egalitatea:

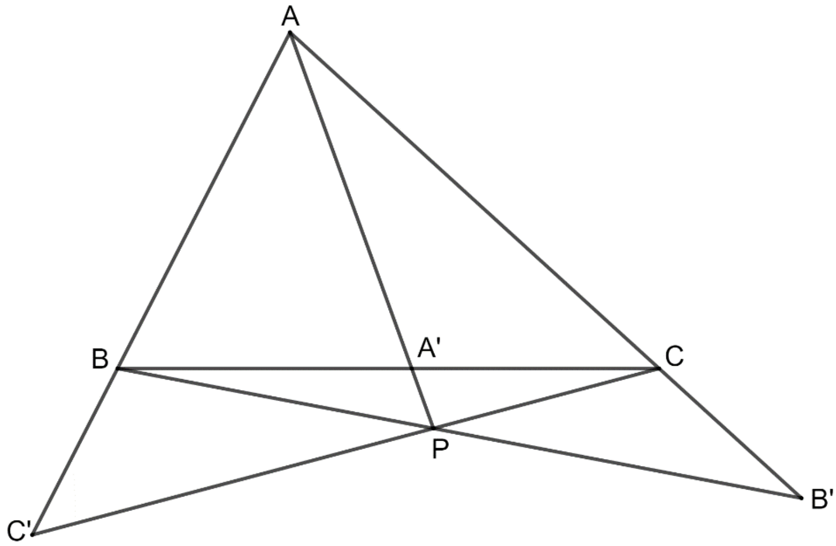
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$



2.2. Teorema Van Aubel [4]

Fie triunghiul ΔABC și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA', BB', CC' sunt concurente intr-un punct P, atunci exista relația:

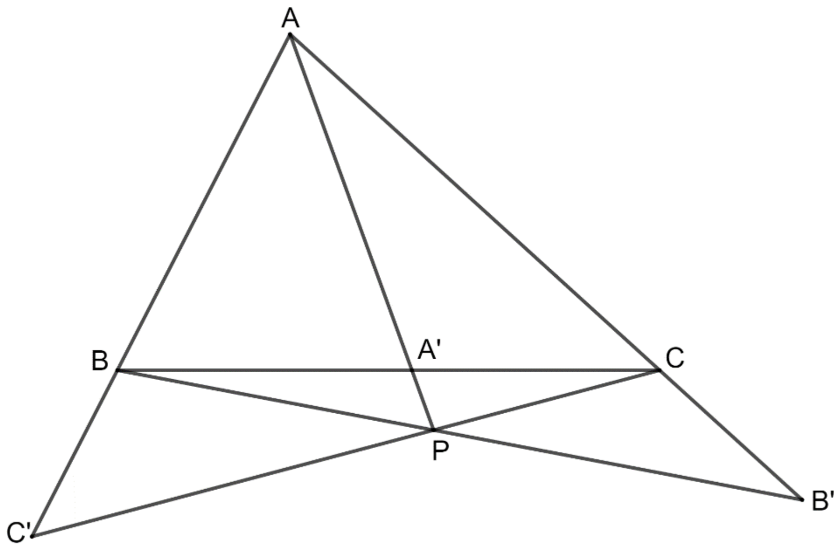
$$\frac{B'A}{B'C} + \frac{C'A}{C'B} = \frac{PA}{PA'}.$$



2.3. **Teorema lui Ceva [4]**

Fie triunghiul ΔABC și punctele $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Dacă dreptele AA', BB' și CC' sunt concurente, atunci:

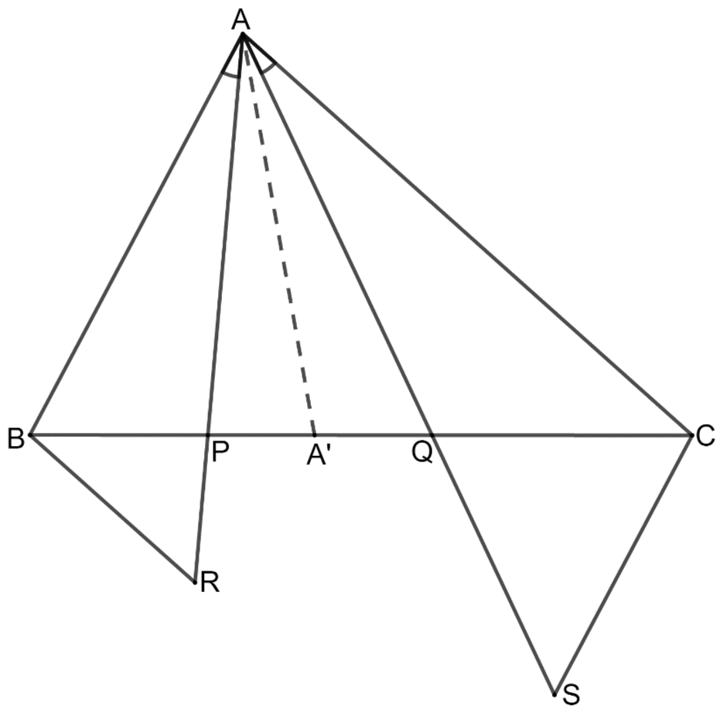
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1.$$



2.4. **Teorema lui Steiner [2]**

Dacă AP şi AQ sunt două izogonale în raport cu unghiul $\sphericalangle BAC$ al triunghiului ΔABC şi P, $Q \in BC$, atunci:

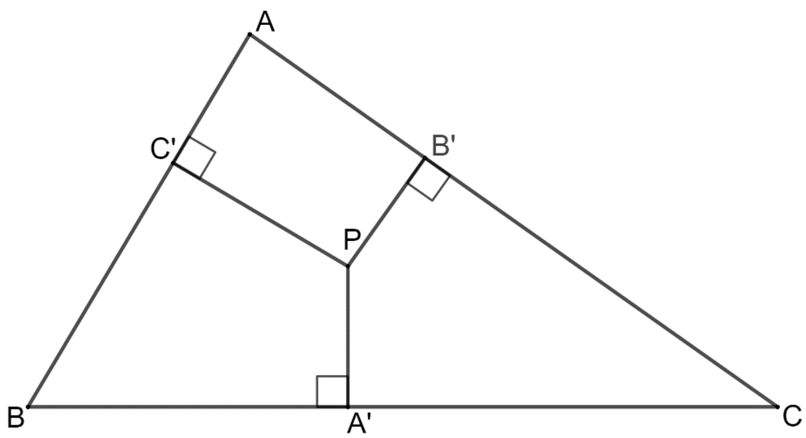
$$\frac{BP}{CP} \cdot \frac{BQ}{CQ} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



2.5. **Teorema lui Carnot [1]**

Fie triunghiul ΔABC și punctele $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$. Perpendicularele duse din punctele A', B', C' pe laturile BC, AC, respectiv AB sunt concurente dacă și numai dacă:

$$AC'^2 - BC'^2 + BA'^2 - CA'^2 +$$
$$+CB'^2 - AB'^2 = 0.$$



2.6. **Teorema lui Desargues [1]**

Fie ΔABC și $\Delta A'B'C'$ două triunghiuri omoloage coplanare, atunci punctele de intersecție ale dreptelor omologe sunt coliniare (punctele M, N și L).

2.7. **Teorema lui Leibniz [1]**

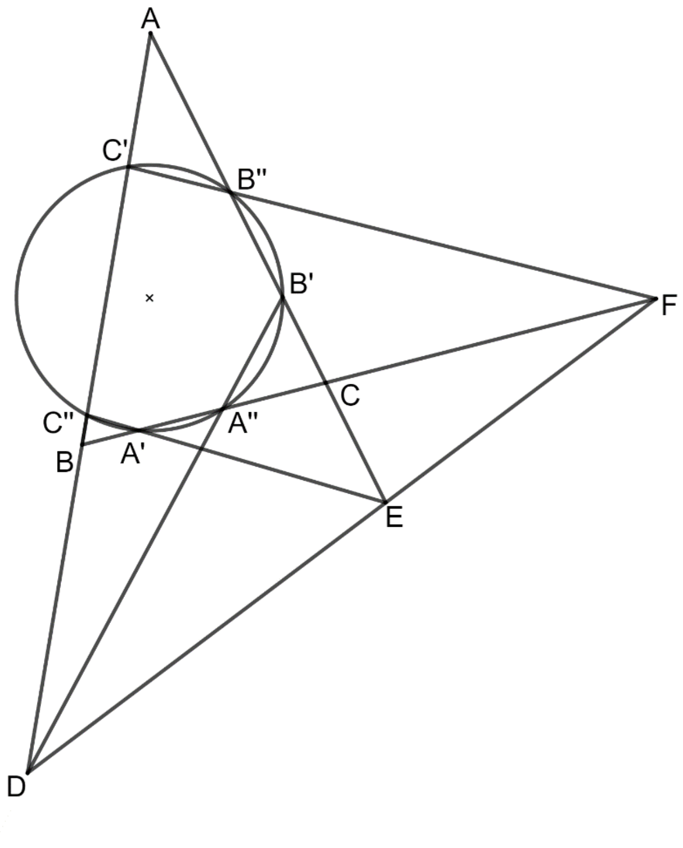
Fie triunghiul ΔABC cu G centrul de greutate. Pentru orice punct M din planul triunghiului ΔABC este adevărată relația:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{3} + 3MG^2 \ .$$

1. Din relația lui Leibniz rezultă că $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \frac{AB^2+AC^2+BC^2}{3}$, egale când punctul M coincide cu punctul G.
2. În orice triunghi ΔABC este adevărată relația: $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$.

2.8. **Teorema lui Pascal [2]**

Fie $A'A''B'B''C'C''$ un hexagon înscris într-un cerc. Se presupune că există punctele F, E, D astfel încât $\{F\} = A'A'' \cap B''C$, $\{E\} = B'B'' \cap C''A'$ și $\{D\} = = C'C'' \cap A''B'$. Atunci punctele F, E, D sunt coliniare.

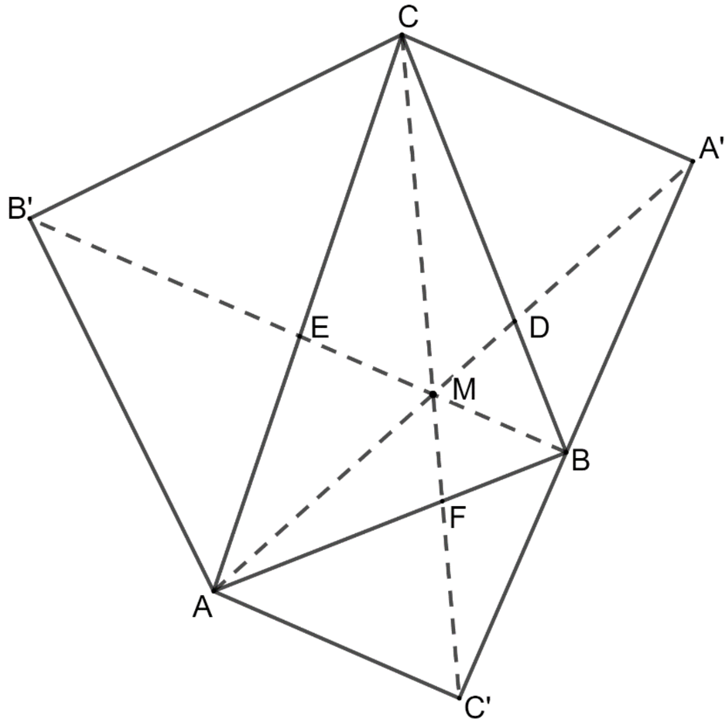


3. Aplicații

3.1. Aplicația 1

Pe laturile triunghiului ΔABC ca ipotenuză se construiesc, în exterior, triunghiurile dreptunghice isoscele $\Delta A'BC$, $\Delta AB'C$, $\Delta ABC'$. Arătați că dreptele AA', BB', CC' sunt concurente (punctul de concurență se numește punctul lui Vecten).

Demonstrație:



Deoarece $AB = AC'\sqrt{2}$, $AC = AB'\sqrt{2}$ și $\sphericalangle BAB' \equiv \sphericalangle CAC'$ folosind formula ariei unui triunghi ca semiprodus dintre lungimile a două laturi și sinusul unghiului dintre ele, rezultă că $\mathcal{A}_{\Delta ABB'} = \mathcal{A}_{\Delta ACC'}$.

$\mathcal{A}_{\Delta BAA'} = \mathcal{A}_{\Delta BCC'}$ și $\mathcal{A}_{\Delta CBB'} = \mathcal{A}_{\Delta CAA'}$.

Notăm $\{D\} = AA' \cap BC$, $\{E\} = BB' \cap AC$, $\{F\} = CC' \cap AB$.

Deoarece $\frac{\mathcal{A}_{\Delta BAA'}}{\mathcal{A}_{\Delta CAA'}} = \frac{DB}{DC}$, $\frac{\mathcal{A}_{\Delta CBB'}}{\mathcal{A}_{\Delta ABB'}} = \frac{EC}{EA}$, și $\frac{\mathcal{A}_{\Delta ACC'}}{\mathcal{A}_{\Delta BCC'}} = \frac{FA}{FB}$.

Din relațiile anterioare obținem:

$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$, deci conform reciprocei teoremei lui Ceva dreptele AD, BE și CF sunt concurente.

3.2. Aplicația 2

Se consideră hexagonul inscriptibil $ABCDEF$. Să se arate că punctele $\{X\} = AB \cap DE$, $\{Y\} = BC \cap EF$, $\{Z\} = CD \cap FA$ sunt coliniare. (Teorema lui Pascal)

Demonstrație:

Fie $\{M\} = AB \cap CD$, $\{N\} = CD \cap EF$, $\{P\} = AB \cap EF$.

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul ΔMNP cu transversalele, avem: $X\text{-}D\text{-}E: \frac{XM}{XP} \cdot \frac{EP}{EN} \cdot \frac{DN}{DM} = 1$;

$Y\text{-}B\text{-}C: \frac{YP}{YN} \cdot \frac{CN}{CM} \cdot \frac{BM}{BP} = 1$;

$Z\text{-}A\text{-}F: \frac{ZN}{ZM} \cdot \frac{AM}{AP} \cdot \frac{FP}{FN} = 1$.

Din egalitățile de mai sus, se obține:

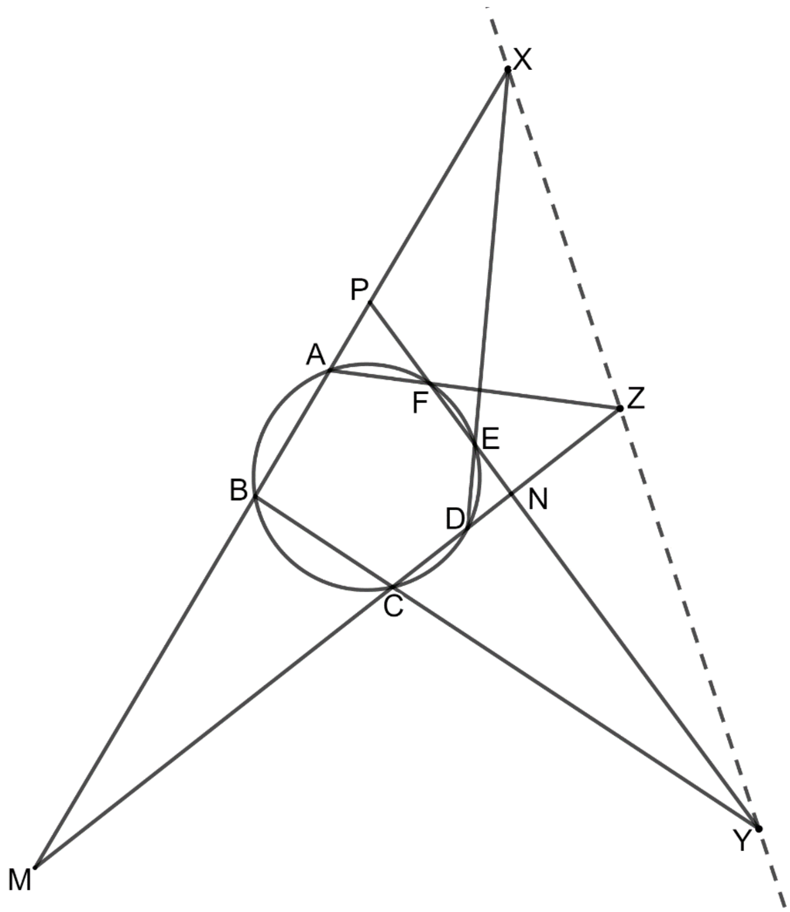
$\frac{XM}{XP} \cdot \frac{YP}{YN} \cdot \frac{ZN}{ZM} = \frac{EN}{EP} \cdot \frac{DM}{DN} \cdot \frac{CM}{CN} \cdot \frac{BP}{BM} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot \frac{FN}{FP}$.

Folosind puterea punctului față de cerc avem:

$MA \cdot MB = MC \cdot MD$,

$NC \cdot ND = NE \cdot NF$ și

$PE \cdot PF = PA \cdot PB$.



Deci $\frac{XM}{XP} \cdot \frac{YP}{YN} \cdot \frac{ZN}{ZM} = 1$. Din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată în triunghiul ΔMNP rezultă că punctele X, Y, și Z sunt coliniare.

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{CP}{PD} = 1 \Rightarrow [CP] \equiv [PD]$.

Concluzii

Studierea geometriei în școală ajută la dezvoltarea de abilități spațiale și abilități de rezolvare a problemelor.
Pe măsură ce progresăm prin învățământul primar și secundar, geometria euclidiană și studiul geometriei plane sunt studiate pe tot parcursul vieții.
Domeniul geometrie euclidiene fiind foarte vast, aceasta lucrare abordează o prezentare sintetică. Această geometrie fiind folosita încă din antichitate de către oameni, ei utilizând-o pentru a măsura distanțele, ariile și volumele.
Geometria o întâlnim în viața de zi cu zi, de ceea este important să avem un bagaj de conștiințe minime despre această disciplină.
Această lucrare cuprinde o serie de noțiuni care ajută la rezolvarea problemelor geometrice. Lucrarea este structurată în trei capitole astfel:
Primul capitol cuprinde noțiuni introductive din geometria triunghiului cum ar fi cercuri remarcabile, drepte si puncte.
Al doilea capitol cuprinde câteva dintre cele mai importante teoreme ale unui triunghi, fapt ce reiese si din numele capitolului “Teoreme fundamentale în geometria triunghiului”.
Ultimul capitol prezintă aplicații în care sunt utilizate teoremele și noțiunile amintite în primele două capitole. Prin rezolvarea acestor aplicații sunt demonstrate alte noi teoreme sau noțiuni, cum ar fi: Teorema lui Pascal demonstrată utilizând teorema lui Menelaus și reciproca ei sau punctul lui Vecten demonstrația rezultând după aplicarea reciprocei teoremei lui Ceva.

Bibliografie

[1] C. Barbu, TEOREME FUNDAMENTALE din GEOMETRIA TRIUNGHIULUI, Bacău: Unique, 2008.

[2] B. Vladimir și L. Nicolescu, PROBLEME PRACTICE DE GEOMETRIE, București: EDITURA TEHNICĂ, 1990.

[3] I. Pașca, Master Didactica Matematicii-Anul I.

[4] P. L. Ioan, Lecții de geometrie analitică și diferențială, Cluj-Napoca: RISOPRINT, 2010.

[5] M. Ganga, Matematică-Manual pentru clasa aIX-a, Ploiești: Mathpress, 2008.

[6] F. D. Marius Perianu, Matematică, București: Art Educațional, 2017.

[7] G. C. Radu Gologan, Matematică: olimpiade și concursuri școlare, Pitești: Paralela 45, 2014.

[8] D. S. Stefan Sabău, Probleme de geometrie plană, Pitești: Paralela 45, 1995.

[9] V. M. Gheorghe Călugărița, Probleme de matematică pentru preapta I si a II-a de liceu, București: Albatros, 1997.

[10] E. R. Gheoghe Rizescu, Teme pentru cercurile de matematică din licee, București: Editura didactică și pedagogică, 1980.

[11] O. Bottema, R. Z. Djordjivic, R. R. Janic, D. S. Mitrinovic și P. M. Vasic, Geometric Inequalites, Wolters Noordhoff Publishing Groingen, 1969.