Interesting uses of trigonometric inequalities

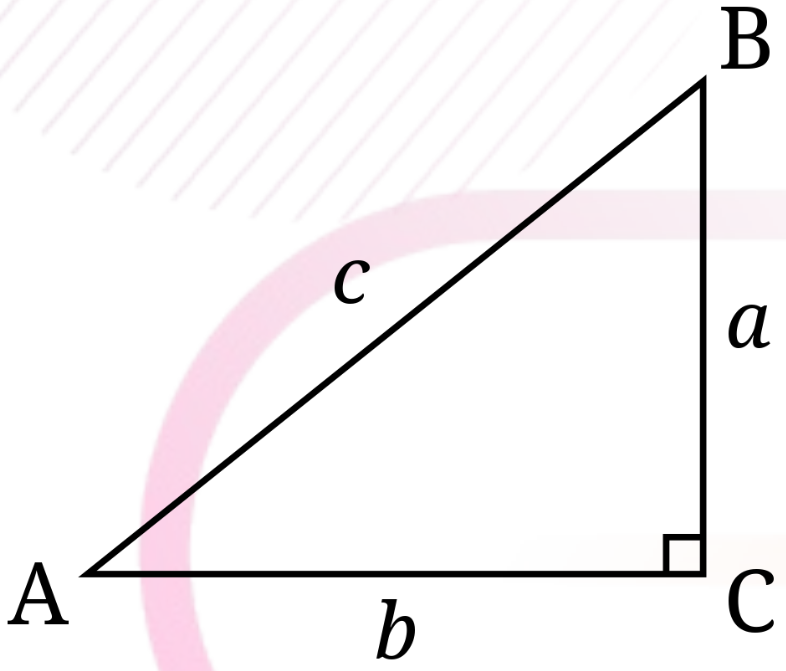
Antonia Maria Cosar

Ce este *trigonometria*?

$$\sin A = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$



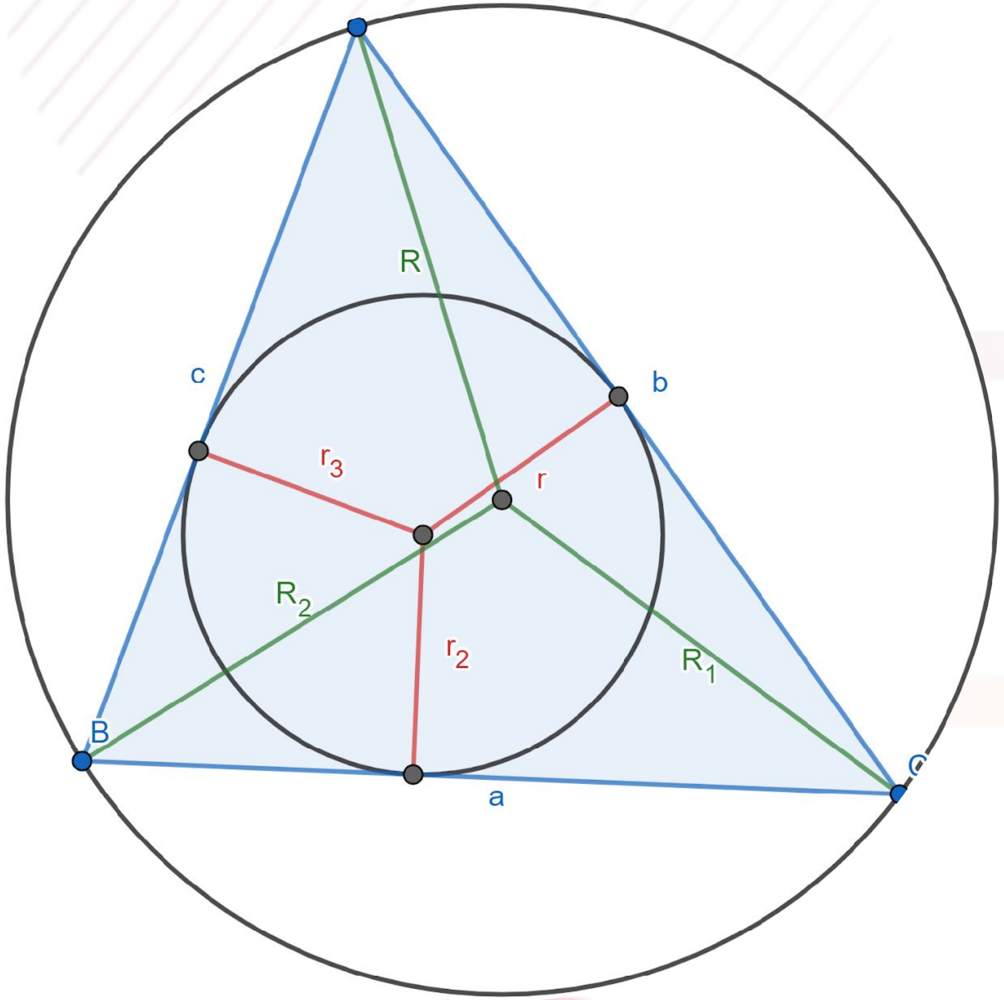
Metode de demonstrare a inegalităților trigonometrice

- Utilizarea convexității/concavității funcțiilor
- Substituțiile
- Interpretarea geometrică

Notații folosite

a, b, c – laturile triunghiului ABC
A, B, C – unghiurile triunghiului ABC
r – raza cercului înscris triunghiului ABC
R – raza cercului circumscris triunghiului ABC

Semnul sumă este folosit în mod obișnuit, parcurgând toate elementele triunghiului.



Inegalități algebrice demonstrabile prin substituții

- Dacă $x, y, z \in (0,1)$ și $xy + yz + zx = 1$, atunci există un triunghi ascuțitunghic ABC, astfel încât $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$.

- Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ și $x + y + z = xyz$, atunci există un triunghi ascuțitunghic ABC, astfel încât $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$.

- Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$ și $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$, atunci există $A, B, C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ cu $A + B + C = \pi$, astfel încât $x = 2\cos A$, $y = 2\cos B$, $z = 2\cos C$.

Problemă.

- Fie $x, y, z \in (0, \infty)$, astfel încât $x + y + z = xyz$. Arătați că:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Din a doua proprietate prezentată anterior rezultă că există un triunghi ABC ascuțitunghic, astfel încât $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$. Deoarece avem $\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1+(\tan A)^2}}$ și relațiile analoage, inegalitatea de demonstrat devine:

$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, inegalitate cunoscută.

Inegalități geometrice

- Inegalitatea lui Gerretsen: $16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$
- Inegalitatea lui Euler: $R \geq 2r$
- $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$
- $\sum \sin A = \frac{p}{R}$
- $\sum \cos B \cos C = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}$
- $\sum \sin B \sin C = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}$
- $\sum a^2 \cos A = \frac{r}{R}[3p^2 - (2R + r)(4R + r)]$

Problemă.

- Demonstrați că $\frac{\cos A^2}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B^2}{\cos A \cos C} + \frac{\cos C^2}{\cos A \cos B} \geq 3.$

Aplicăm inegalitatea CBS și obținem

$$\frac{\cos A^2}{\cos B \cos C} + \frac{\cos B^2}{\cos A \cos C} + \frac{\cos C^2}{\cos A \cos B} \geq \frac{(\cos A + \cos B + \cos C)^2}{\cos B \cos C + \cos A \cos C + \cos A \cos B}$$

$\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2 \geq \cos B \cos C + \cos A \cos C + \cos A \cos B$

$2(\cos B \cos C + \cos A \cos C + \cos A \cos B) \geq \cos B \cos C + \cos A \cos C + \cos A \cos B$, de unde rezultă concluzia.

- Înlocuind cu formulele prezentate anterior, inegalitatea se reduce la a arăta că:

- $\frac{4(R+r)^2}{p^2+r^2-4R^2} \geq 3 \leftrightarrow p^2 \leq \frac{16R^2+r^2+8Rr}{3}$, dar din inegalitatea lui Gerretsen știm că $p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, atunci rămâne de demonstrat că $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq \frac{16R^2+r^2+8Rr}{3} \leftrightarrow Rr + 2r^2 \leq R^2$.

- Din inegalitatea lui Euler, $R \geq 2r \rightarrow Rr \leq \frac{R^2}{2}$ și $2r^2 \leq \frac{R^2}{2}$, deci problema este demonstrată.

Alte aplicații ale trigonometriei

- Trigonometria o folosim și în fizică, geografie, astronomie, construcții, criminologie etc.
- De exemplu, trigonometria sferică este adesea folosită în astronomie.
- Trigonomentria sferică studiază poligoanele de pe sferă și relațiile dintre laturile și unghiurile lor.

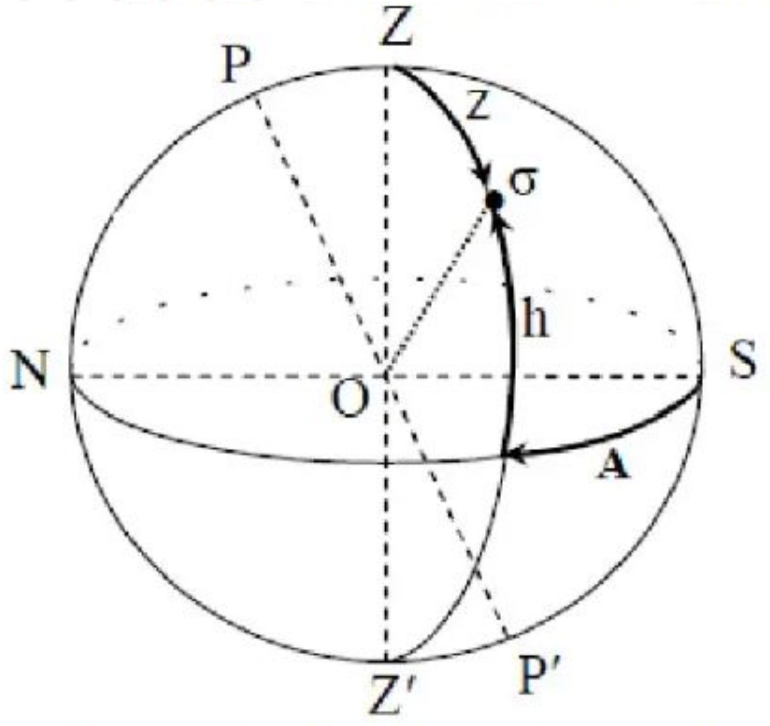
Trigonometria sferică în astronomie

Coordonatele orizontale ale unui astru σ sunt :

- *înălţimea deasupra orizontului (h)* este unghiul format de direcţia spre astru cu planul orizontului. Adesea, în locul înălțimii, care este mai greu de măsurat se utilizează complementul ei $z = 90° - h$, numit *distanţă zenitală (z)*, adică unghiul format de verticala locului cu direcţia spre astru.

Coordonatle orare ale unui astru σ sunt :

- *declinația δ*, care este unghiul format de raza corespunzătoare astrului cu planul ecuatorului ceresc;
- *unghiul orar H*, care este unghiul format de meridianul ceresc al locului cu cercul orar al astrului.



Problemă.

- Ce valoare trebuie să aibă declinația unui astru pentru ca el să treacă la meridian, la zenitul locului?

Condițiile impuse cer ca direcțiile OZ și Oσ să coincidă. Pentru că astrul trece la meridian, unghiul orar $H = 0$.

Aplicăm formula cosinusurilor, cu H=0 și obținem

$$\cos z = \cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta \rightarrow \cos z = \cos(\delta - \varphi) \rightarrow z = \delta - \varphi$$

Deoarece steaua trece la meridian, prin zenitul locului, avem δ=φ.

Concluzii

- Se observă că anumite probleme se pot demonstra mult mai usor cu ajutorul trigonometriei, iar unele probleme trigonometrice merg mână în mână cu geometria.
- Studiul trigonometriei este așadar foarte util, având în vedere că ne ciocnim de ea atât la concursuri, cât și în viața de zi cu zi.

Gata prezentarea. Sper că v-ați distrat!

Bibliografie

- Marin Chirciu, *Inegalități trigonometrice*, Editura Paralela 45, 2016, Pitești;
- Nicolae Mușuroia, Aplicații ale trigonometriei în algebră, *Matematică de excelență*, Editura Paralela 45, 2019, Pitești;
- Nicu Goga, *Sistemul Solar - Astronomie pentru şcolari prin exerciţii şi probleme,* Editura Revers, 2010, Craiova.